ESPACE FIBRÉ ET CRÉATION SONORE ET VISUELLE. DE L'ÉLÉMENT SIMPLE AUX DIMENSIONS CACHÉES ET ENCHEVÊTRÉES 3ICAR /ICAREDITIONS - INTERNATIONAL INSTITUTE FOR INNOVATION, ARTISTIC CREATION AND RESEARCH

CHRISTOPHE MOUROUGANE / STÉPHANE DE GÉRANDO

RÉSUMÉ. A l'aide d'un langage géométrique, nous proposons d'introduire une modélisation générale de la composition sonore et visuelle qui pourrait aider au renouvellement des problématiques compositionnelles, les notions complexes apparaissant comme des dimensions cachées et enchevêtrées. Nous définissons sept espaces différents, de la création artistique à la composition. L'espace de composition $ECOMP$ est lui-même composé de quatre espaces fondamentaux reliés par des applications. Puis nous définissons des objets sonores et visuels simples, qui peuvent être enrichis en des objets sonores et visuels complexes grâce au concept de fibre. L'espace compositionnel devient alors un espace fibré sur l'espace des objets simples. La considération du temps en fait un espace fibré sur un espace-temps. L'objectif suivant est de définir une structure métrique sur l'espace compositionnel offrant la perspective d'inventer des trajectoires compositionnelles singulières dans cet espace initial. Pour imaginer notre espace formel, nous partons d'une analyse singlière des ensembles homométriques module 24 (méta-échelle intervallique ou méta-mode) associée au calcul de distances (distances de Hausdorff) à l'intérieur d'une même fibre ou entre OSVC.
MOTS CLÉS. Création artistique sonore et visuelle, structures géométriques, espace fibré, ensembles homométriques, méta-échelles intervalliques et méta-mode, distances de Hausdorff.

TABLE DES MATIÈRES

1. INTRODUCTION

Dans le prolongement de la formalisation d'objets multidimensionnels propres à décrire différentes échelles d'organisation, l'objectif est d'appréhender globalement la composition musicale et visuelle à l'aide d'un langage géométrique. Lorsque l'on évoque le terme de composition, (précisons ici qu'il est bien question de création et d'invention artistique et non d'imitation) on ne présage pas du résultat sensible et intellectuel avant

Christophe Mourougane est mathématicien, chercheur à l'institut de recherche mathématique de Rennes (France), Stéphane de Gérando est compositeur, professeur de composition et nouvelles technologies, Docteur Habilité à Diriger les Recherches, ancien directeur de département universitaire et directeur pédagogique de centre de formation supérieure des enseignants. Pour citer cet article : Mourougane Christophe, de Gérando Stéphane, *Espace fibré et création sonore et visuelle. De l'élément simple aux dimensions cachées et enchevêtrées*, 3icar /icarEditions, 2015. Distribution électronique © 3icar /icarEditions (3icar.com). Tous droits réservés pour tous pays.

de l'avoir imaginé, tout en tentant d'imaginer ce qui serait initialement impossible à entendre ou à voir.

Pour simplifier notre approche, nous ferons dans cet article constamment référence à deux types d'invention et de réalisation artistique :

(1) l'une "numérique" : la réalisation de l'œuvre est le produit de l'ordinateur (diffusion des images via des vidéo-projecteurs et du son via des haut-parleurs par exemple, programme informatique représentant *in fine* le support de l'œuvre),

(2) l'autre plus "classique" dans un cadre musical, via l'existence de partitions et d'interprètes (instruments acoustiques).

Soulignons pour simplifier très schématiquement que les potentialités d'invention de l'art numérique englobent les réalisations instrumentales plus classiques (les différences dans les reproductions numériques d'œuvres instrumentales sont aujourd'hui quasiment imperceptibles), mais pas inversement (l'instrumentiste de peut pas contrôler précisément l'harmonique 3 du spectre de la clarinette alors qu'en synthèse additive, cela est tout à fait possible par exemple).

L'acronyme OSV simple désigne un objet sonore et visuel abstrait ou concret, caractérisé physiquement par trois paramètres : la fréquence (hauteur en musique), l'intensité (nuance) et la durée.

L'objectif de ce travail est de décrire différents espaces propre à la création et à la composition, formaliser la donnée de paramètres supplémentaires avec la notion d'OSV complexes et de théoriser des distances qui permettraient d'inventer (de composer) des trajectoires.

2. Différents espaces

Nous différencions l'espace de création de l'espace purement compositionnel, celui qui nous intéresse principalement dans cette recherche. Cette présentation des espaces est ordonnée, du général au particulier de l'œuvre.

2.1. *ECRA*, Espace de création. À l'image d'un univers de la création, l'espace de création est composé de l'ensemble des espaces qui participent directement ou plus indirectement à la création d'une œuvre, du contexte extérieur au compositeur, dans lequel il naît et qu'il ne choisit pas, à la réception de l'œuvre.

1.– E_{CGI}, contextes général et individuel

2.– E_{FOR}, espace formel (symbolique)

3.– E_{PHY}, espace physique (symbolique)

4.– E_{PER}, espace perceptif (symbolique)

5.– E_{COD} espace de codification, support de l'information (partition, fichiers son et vidéo, programme informatique pour les œuvres algorithmiques temps réel)

6.– E_{INT} espace d'interprétation

7.– E_{REC} espace de réception

2.2. *ECOMP*, Espace compositionnel. À l'image d'une "galaxie" compositionnelle faisant parti de l'"univers" de la création, l'espace compositionnel est composé des quatre espaces symboliques suivant à partir desquels le compositeur agit :

1.– E_{FOR}, espace formel (2)

2.– E_{PHY}, espace physique (3)

3.– E_{PER}, espace perceptif (4)

4.– E_{COD} espace de codification (5)

Le compositeur n'a en effet pas habituellement d'action directe sur les espaces de création 1, 6, et 7. C'est en ce sens que l'espace compositionnel se différencie de l'espace de création. D'une autre manière, lorsque le compositeur apprend la composition dans un conservatoire par exemple, il apprend à naviguer plus ou moins consciemment dans ces différents espaces.

Illustrons *ECOMP* par un exemple simple. Pour élaborer une œuvre la plus désordonnée possible par exemple, nous pourrions produire un désordre symbolique (ensemble de nombres) passant par un contrôle de l'entropie en utilisant des outils mathématiques tirés de la thermodynamique (E_{FOR}). Puis ces données devront être appliquées aux paramètres physiques du son et de la lumière (OSV) (E_{PHY}) pour être de nouveau traduites dans le domaine perceptif (E_{PER}). Dans une situation traditionnelle, la partition (E_{COD}) ne fait que représenter l'information déjà composée. La réalisation d'un programme informatique pour réaliser une œuvre temps réel est aussi possible, E_{FOR} et E_{COD} ayant alors tendance à se confondre.

Dans cette recherche, nous insisterons davantage sur les espaces formel, physique et perceptif. Le triangle (1) ci-dessous illustre la relation entre ces trois espaces en omettant dans un premier temps la dimension de temps.

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{E}_{PHY} \arrow[dr, "\text{tper}"] & \\ \mathrm{E}_{FOR} \arrow[ur, "\text{tphy}"] \arrow[rr] & & \mathrm{E}_{PER} \end{tikzcd} \tag{1}$$

Ces espaces sont reliés par des applications tphy : $\mathrm{E}_{FOR} \to \mathrm{E}_{PHY}$ et tper : $\mathrm{E}_{PHY} \to \mathrm{E}_{PER}$, données conceptuelles appliquées aux paramètres physiques et perceptifs des objets sonores et visuels (OSV).

L'art du compositeur réside dans sa capacité à lier le plus souplement possible ces trois espaces, souvent en les imbriquant sans toujours les hiérarchiser ou leur donner un ordre d'utilisation.

2.2.1. E_{FOR}, *L'espace formel.* Cet espace est considéré comme un ensemble infini ou fini de symboles que le compositeur utilise pour traduire une problématique qui peut être de nature "formelle" (purement combinatoire, géométrique ou autre....), sans lien direct avec le domaine artistique. D'une autre manière, pour plus de lisibilité entre prospection théorique et création musicale, on pourrait considérer que cet espace compositionnel doit s'approcher de l'ossature commune de l'ensemble E_{PHY} des phénomènes physiques et visuels et de l'ensemble E_{PER} des phénomènes perçus. Rappelons cependant que l'informatique et la création numérique permettent d'avoir recours à un ensemble beaucoup plus important de symboles que dans le cadre de la notation et de la réalisation d'une œuvre instrumentale acoustique "classique". Choix entre un espace infini ou fini, il y a souvent la nécessité d'interpréter cet espace symbolique dans les deux autres espaces.

Pour exemple comme point de départ d'une problématique compositionnelle illustrant cet espace formel, nous ferons couramment référence dans cette étude aux ensembles homométriques.

2.2.2. E_{PHY}, *L'espace physique.* L'ensemble E_{PHY} est la traduction de l'espace formel sur l'espace des paramètres physiques des objets perceptifs liés aux cinq sens, espace que nous limitons comme nous l'avons souligné aux objets sonores et visuels (OSV). En d'autres termes, l'espace physique E_{PHY} est une déformation de l'espace formel E_{FOR}.

Si l'on conserve l'exemple initial des ensembles homométriques illustrant l'espace E_{FOR}, E_{PHY} traduirait une "simple" application de ces ensembles aux paramètres sonores et visuels. Mais plus encore, cet espace représente en lui-même un potentiel problématique venant enrichir E_{FOR}, soit à travers sa simple description ou plus encore à travers l'existence de modèles de description physique du signal etc...

Prenons un exemple. Pour un phénomène physique simple, l'ensemble E_{PHY} se construit à partir d'un espace à trois dimensions de fréquence, d'intensité et de durée du son ou de la lumière. Dans un cadre musical, cette fréquence serait continue pour le violon ou discrète pour un piano accordé en demi-ton. À chaque triplet (F, I, δ)=(fréquence, intensité, durée) s'ajoute un espace appelé "fibre en (F, I, δ)" ou bien "fibre timbre en (F, I, δ)" et noté $T_{(F,I,\delta)}$, certainement de grande dimension mais petit compact, dont chaque point est un spectre (dans le cadre sonore un timbre) dans lequel la note indiquée par la fréquence F peut être jouée avec l'intensité I et la durée δ. Cette fibre $T_{(F,I,\delta)}$ contient par exemple la donnée des intensités auxquelles les harmoniques et les notes voisines peuvent émises quand est jouée la note principale F avec l'intensité I. Mathématiquement, il s'agit du développement de Fourier du son produit dont les coefficients non nuls seront sur les harmoniques et les notes voisines, avec de petites valeurs.

Comme le timbre, la complexité des fibres timbres $T_{(F,I,\delta)}$ dépend de façon fondamentale de l'instrument utilisé. La connaissance de ces fibres est d'abord empirique, obtenue par l'expérience. Dans un cadre numérique, la considération de ces fibres timbres devrait constituer un apport singulier (création de tout type de timbre par synthèse).

Cet espace comporte déjà une forme de complexité, puisqu'il traduira des structures particulières qui vont donner des spécificités à la musique jouée. Certaines viennent des règles musicales écrites, comme le choix d'échelles ou d'ensemble de grandeurs ayant des caractéristiques singulières. Dans ce cas, si un triplet (F, I, δ) est autorisé, toute la fibre timbre $T_{(F,I,\delta)}$ l'est. On pourrait concevoir des structures plus horizontales, qui autorisent une note quand elle est jouée avec un timbre particulier, seulement en phase ascendante ou pour un mélisme mélodique sélectionné (courbure de la phrase musicale).

Pour revenir à un cadre problématique enrichissant l'espace formel, nous sommes conduits à le munir de structures géométriques, comme celles décrites dans l'annexe A. Les structures sont un choix de règles, qui ne seront validées principalement qu'à travers l'écoute et la perception des œuvres conformes à ces règles. L'espace symbolique E_{PHY} des paramètres sonores et sons produits, outre sa structure fibrée peut aussi répondre à des modèles spécifiques tel que le modèle de synthèse additive pour inventer des timbres avec l'ordinateur. Un des enjeux artistiques de notre époque est d'envisager une recherche spéculative de haut niveau liant E_{FOR} et E_{PHY}, avec la nécessité non pas d'imiter des modèles naturels par exemple, mais d'inventer de nouveaux objets sonores et visuels. Comme nous l'avons souligné, la notion d'expérimentation est importante pour éviter d'entreprendre un travail cloisonné et inefficace entre les espaces E_{FOR}, E_{PHY} et E_{PER}. Nous ajouterons la dimension de l'espace-temps au chapitre 2.3.

2.2.3. E_{PER}, *L'espace de perception.* Cet espace symbolique est une déformation de l'espace physique en un espace perceptif lié potentiellement à l'écriture des cinq sens. L'axe des fréquences de E_{PER} pourrait par exemple devenir une spirale autour d'un cercle de base modulo X (division de l'octave en X parties). L'axe des intensités passerait d'une échelle en "Watt" à une échelle logarithmique mieux adaptée à la mesure de l'intensité perçue...

2.2.4. *Les applications* tphy *et* tper. Les applications tphy et tper permettent de passer d'un espace purement conceptuel à un espace perceptif. Dans l'exemple proposé, l'application tphy de mise en correspondance symbolique d'une donnée formelle (souvent numérique, un ensemble homométrique par exemple) et d'un point de l'espace physique (donc un OSV). Le choix de cette application est un des moments déterminants de la création. L'application de perception tper est une formalisation de la perception sensorielle effective [1].

2.3. **Représentation de l'espace-temps.** Introduisons la dimension de l'espace-temps.

Il est naturel de concevoir que les espaces E_{FOR}, E_{PHY} et E_{PER} précédents ne sont en fait à leur tour que des fibres d'espaces fibrés $\mathscr{E}_{FOR}$, $\mathscr{E}_{PHY}$ et $\mathscr{E}_{PER}$ sur un espace temps. Voir la figure 1.

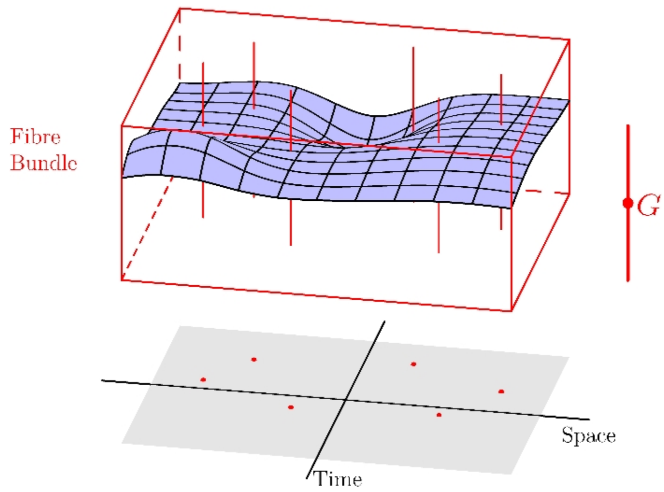


FIGURE 1. Dans cette représentation G est une fibre type, pour nous E_{FOR}, E_{PHY} ou E_{PER}, et l'espace fibré est pour nous $\mathscr{E}_{FOR}$, $\mathscr{E}_{PHY}$ ou $\mathscr{E}_{PER}$.

Ces espaces se combinent en

$$\begin{tikzcd}
 & \mathscr{E}_{PHY} \arrow[dr, "\text{tper}"] \arrow[dd] & \\
\mathscr{E}_{FOR} \arrow[ur, "\text{tphy}"] \arrow[d] & & \mathscr{E}_{PER} \arrow[d] \\
\begin{array}{c}\text{espace temps}\\ \text{formel}\end{array} \arrow[dr] & \begin{array}{c}\text{espace temps symbolique}\\ \text{des paramètres physiques des sources (OSV)}\end{array} \arrow[d] & \begin{array}{c}\text{espace temps symbolique}\\ \text{des OSV perçus}\end{array} \arrow[dl] \\
 & \{\text{instants}\} \arrow[uuu, bend left=60, "\text{emi}"] &
\end{tikzcd} \tag{2}$$

A travers le processus d'invention d'une œuvre lié à l'écriture des trois espaces formel, physique et perceptif, le compositeur imagine par exemple le jeu du musicien qui à chaque instant produit un son ou plus généralement l'émission d'information sonore et visuelle, qui sont représentés par l'application emi. Il est convenu que chaque boucle obtenue par composition d'applications conduit à l'identité. Par exemple, la valeur de emi en t doit être dans la fibre de $\mathscr{E}_{PHY}$ en t. On dit que emi est une *section* de l'espace fibré $\mathscr{E}_{PHY} \to \{\text{instants}\}$. Comme nous l'avons déjà souligné, l'application de perception

1. Notre exposé s'arrête principalement à ce niveau de description, la question de la notation (partition) ou de la codification de l'œuvre, de son interprétation et de sa réception étant consécutif aux trois espaces envisagés ici. Soulignons cependant de nouveau que l'existence d'un programme informatique représentant en soi l'œuvre composée et réalisée bouscule ces frontières spatiales, le programme représentant à lui seul des espaces conceptuel, physique, perceptif, de codification de l'œuvre équivalent à une partition et de réalisation (interprète).

tper est une déformation de l'espace formel, problématique qui peut être purement conceptuelle.

3. Composition

3.1. **Remarques introductives générales.** Les émissions d'information pourraient être contraintes par les structures additionnelles de l'espace formel $\mathscr{E}_{FOR}$, à travers la succession d'applications qui pourrait préciser le diagramme (2)

$$\begin{tikzcd} \{instants\} \arrow[r, "\text{red}"] \arrow[rr, bend left, "\text{emi}"] & \mathscr{E}_{FOR} \arrow[r, "\text{tphy}"] & \mathscr{E}_{PHY} \end{tikzcd}$$

L'application red est l'application de rédaction de l'œuvre.

Par exemple, en représentant un intervalle de temps par un segment $[0, T]$, l'image de l'application de déplacement d'un OSV (objet sonore et visuel) est une trajectoire dans l'espace temps et l'image emi$([0, T])$ de l'application emi est une trajectoire dans l'espace $\mathscr{E}_{PHY}$, qui doit respecter les structures de l'espace formel $\mathscr{E}_{FOR}$. Voir la figure 2. Une image parlante de notre démarche est donnée par la figure 2 : la trajectoire plane

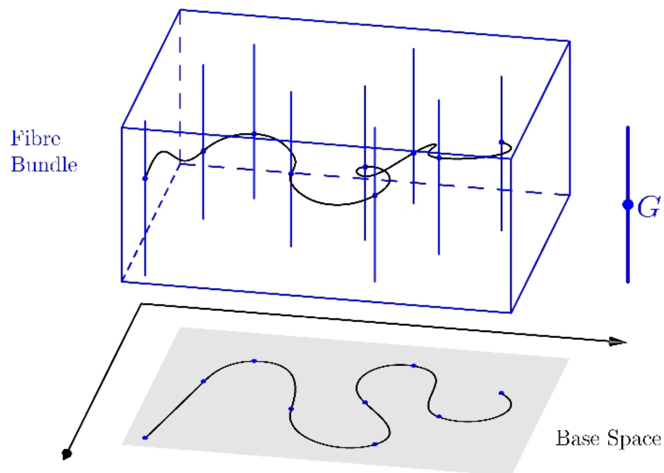


FIGURE 2. Une trajectoire dans l'espace temps et son relèvement dans l'espace des sons et lumières physiques $\mathscr{E}_{PHY}$

dans la partie rose est tracée dans un espace simple à deux dimensions : elle correspond à une succession d'objets simples. Pour ajouter de l'information, on ajoute des fibres (verticales dans la figure) et on "relève" la trajectoire plane en un chemin dans l'espace fibré, qui correspond à une succession d'objets complexes. Si l'espace formel incluant ses dimensions d'espace-temps $\mathscr{E}_{FOR}$ est muni d'une métrique par exemple, on pourrait demander que le chemin red soit une géodésique. Comme une droite se définit avec peu de données, à l'écoute, le résultat d'un tel choix serait certainement décevant, puisqu'il correspond à la transmission de peu d'information.

Le travail de composition, dans un cadre numérique, serait alors schématiquement dans un premier temps

- de construire un espace formel $\mathscr{E}_{FOR}$ et de le munir de structures géométriques,
- de construire les applications de réalisation symbolique tphy et de perception symbolique tper,
- et de choisir une trajectoire red dans $\mathscr{E}_{FOR}$ (une "rédaction") qui respecte les structures choisies sur $\mathscr{E}_{FOR}$ (et qui soit pertinent dans ses réalisations physique et perceptive symboliques).

Ces choix seraient validés par leur traduction à l'écoute : écoute intérieure de l'œuvre avant de pouvoir la réaliser, phases expérimentales (simulation auditive de l'œuvre), ou réalisation de l'œuvre des cas particuliers comme pour la programmation d'un algorithme.

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathscr{E}_{PHY} \arrow[rrd, "\text{tper}"] \arrow[dd] & & \\
\mathscr{E}_{FOR} \arrow[rru, "\text{tphy}"] \arrow[d] & & & & \mathscr{E}_{PER} \arrow[d] \\
\text{espace temps formel} \arrow[rrd] & & \text{espace temps symbolique des paramètres physiques des sources (OSV)} \arrow[d] & & \text{espace temps symbolique des OSV perçus} \arrow[lld] \\
 & & \{\text{instants}\} \arrow[lluu, bend left, "\text{red}"] & &
\end{tikzcd} \tag{3}$$

La comparaison des diagrammes (1) et (3) montre une complexification de notre modélisation. La composition sous-entend un travail préalable, à la fois pour définir une problématique compositionnelle propre à chaque œuvre, pour envisager un travail d'ingénierie des OSV et rendre possible la définition de structures additionnelles. Il s'agit par exemple, par des expériences répétées, de répertorier et de structurer au mieux l'ensemble des timbres dans lesquels une fréquence F peut être jouée avec l'intensité I et la durée δ, afin d'approcher au mieux les fibres timbres $T_{(F,I,\delta)}$.

3.2. **Modèle par analogie avec la théorie des cordes.** Il est envisageable de proposer un modèle métrique discret dans lequel il est concevable de calculer des approximations de géodésiques ou tout autre trajectoire singulière. Par analogie avec la théorie des cordes où il est nécessaire d'envisager des "dimensions enroulées", nous pourrions modéliser les fibres timbres par des variétés de Calabi-Yau.

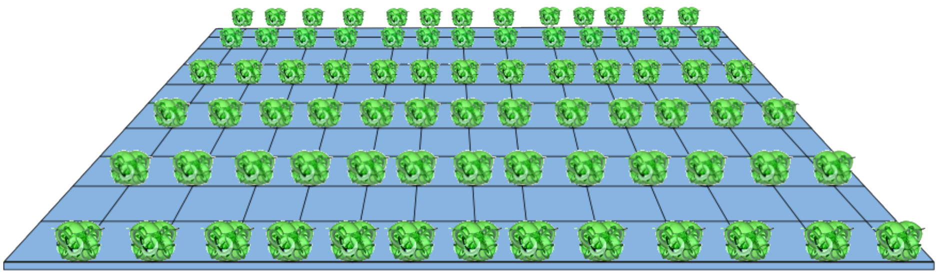


FIGURE 3. Les dimensions enroulées sont modélisées par des variétés de Calabi-Yau

Il n'y a que très peu d'exemples dans lesquels les métriques Ricci plates (caractéristiques de la structure de Calabi-Yau) peuvent être explicitées. L'implémentation d'un modèle d'espace formel $\mathscr{E}_{FOR}$ dont les fibres seraient des variétés de Calabi-Yau munies de métriques Ricci plates et la construction d'une application de réalisation physique tphy artistiquement pertinentes semblent techniquement difficiles.

4. EXEMPLES DE FORMALISMES COMPOSITIONNELS

En s'inspirant de notre approche générale, nous introduisons étape par étape des axes de développement d'une stratégie compositionnelle qui pourrait par la suite être développée.

Précisons que nous imaginons notre espace compositionnel (aspects formels, physiques, cognitifs) comme un ensemble d'objets de multiples dimensions, à l'image de l'univers, du microcosme au macrocosme de la composition. Cet univers est constitué de points ou objets sonores et visuels simples (OSVS) associés à des fibres (OSV complexes). La construction d'espaces métriques permettrait de traduire des distances offrant la possibilité de décrire et de combiner des trajectoires singulières dans ces espaces (règles d'écriture compositionnelle). Dès lors, on comprend que ces espaces sont multiples, d'un voyage sonore et lumineux à l'intérieur d'une même ou de différentes fibres à une combinatoire de l'espace-temps voire de plusieurs musiques combinées dans des espaces temps parallèles, plurivers...

4.1. **Préparation de l'espace compositionnel $ECOMP$.**

4.1.1. *Ensembles homométriques, méta-échelles intervalliques et méta-modes.* Pour inventer l'espace compositionnel $ECOMP$, plus précisément $\mathscr{E}_{FOR}$ puis $\mathscr{E}_{PHY}$, nous utilisons pour exemple les ensembles homométriques dont nous avons déjà une expérience [5]. Si A est un ensemble fini de nombres entiers naturels $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ noté avec $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$, le *multi-ensemble des différences* (le préfixe multi indique que les éléments sont pris sans ordre mais avec multiplicités) est

$$\Delta(A) := \{a_j - a_i, \text{ pour tout couple } (i, j)\}.$$

Deux ensembles finis de nombres entiers naturels A et B sont dits *homométriques*, s'ils ont les mêmes multi-ensembles $\Delta(A)$ et $\Delta(B)$ de différences.

Pour mieux comprendre un exemple d'$\mathscr{E}_{FOR}$, anticipons les liens avec $\mathscr{E}_{PHY}$ en donnant un exemple simple d'application. Dans le cadre de l'organisation des hauteurs de son liées aux OSV (objets sonores et visuels), pour les ensembles $\{0,2,3,5,7,8,10\}$ et $\{0,2,4,5,7,9,11\}$ (qui correspondront par l'application de réalisation tphy aux modes mineur mélodique descendant et majeur en prenant comme unité le demi-ton), les multi-ensembles de différences sont

Δ (A)	0	2	3	5	7	8	10
0		2	3	5	7	8	10
2	10		1	3	5	6	8
3	9	11		2	4	5	7
5	7	9	10		2	3	5
7	5	7	8	10		1	3
8	4	6	7	9	11		2
10	2	4	5	7	9	10	

et

Δ (B)	0	2	4	5	7	9	11
0		2	4	5	7	9	11
2	10		2	3	5	7	9
4	8	10		1	3	5	7
5	7	9	11		2	4	6
7	5	7	9	10		2	4
9	3	5	7	8	10		2
11	1	3	5	6	8	10	

$$\Delta(A) = \{0^7, 1^2, 2^5, 3^4, 4^3, 5^6, 6^2, 7^6, 8^3, 9^4, 10^5, 11^2\} = \Delta(B)$$

Puisqu'une classe d'ensembles homométriques est caractérisée par son multi-ensemble des différences, on appelle *"méta-échelle intervallique"* une classe d'ensembles homométriques. Un ensemble homométrique avec un point base (première valeur de l'ensemble, pour lever l'indétermination de la translation ou transposition) peut être appelé *"mode"* appliqué aux hauteurs dans un cadre musical.

4.1.2. *Tableaux de correspondance des paramètres corrélés des OSVC.* Nous donnons maintenant un exemple d'application tphy, c'est à dire une façon de faire correspondre à la donnée formelle d'un ensemble homométrique avec un point base un OSV (physique).

Les notions de distance ou de trajectoire se calcule en fonction de l'ensemble des paramètres des OS en lien avec l'écriture d'une partition (espace de codification).

Dès lors avant d'imaginer des trajectoires, le compositeur cherche à créer différents tableaux de correspondance des paramètres corrélés des OSCV, tableaux symbolisant les différents espaces sonores et visuels à travers lesquels l'œuvre évoluera.

Prenons pour exemple le tableau de correspondance ci-dessous réalisé par le compositeur pour composer la première minute d'une œuvre. Il s'agit en fait ici d'une simple corrélation chromatique des paramètres.

Echelle modulo 24	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
hauteurs	do	do+	do#	do#+	re	re+	re#	re#+	mi	mi+	fa	fa+	fa#	fa#+	sol	sol+	sol#	sol#+	la	la+	la#	la#+	si	si+
en midi	60	60,5	61	61,5	62	62,5	63	63,5	64	64,5	65	65,6	66	66,5	67	67,5	68	68,5	69	69,5	70	70,5	71	71,5
en milliseconde	125	250	375	500	625	750	875	1000	1125	1250	1375	1500	1625	1750	1875	2000	2125	2250	2375	2500	2625	2750	2875	3000
intensités	ppp			pp			p			mp			mf			f			ff			fff		
en midi (0 à 127)	28	28	28	42	42	42	56	56	56	70	70	70	84	84	84	98	98	98	122	122	122	127	127	127
espace (coordonnées x)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
espace (coordonnées y)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
espace (coordonnées z)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23

Selon la première valeur de ce tableau, à un instant t, un OS simple a les mêmes paramètres corrélés, comme une durée d'une triple croche, une nuance PPP et des coordonnées (0,0,0). Le compositeur peut par contre changer les hauteurs de son en fonction de la fibre ou ensemble homométrique qui serait associé au do de cette échelle chromatique (voyage dans la fibre de l'OS complexe).

Ces différents espaces à prévoir pour la composition de l'ensemble d'une œuvre peuvent naître d'un jeux combinatoire et de déformation des grandeurs du tableau de correspondance présenté ci-dessus. Voici un simple exemple avec des valeurs simplement inversées (durées, nuances, coordonnées).

Echelle modulo 24	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
hauteurs	60	60,5	61	61,5	62	62,5	63	63,5	64	64,5	65	65,6	66	66,5	67	67,5	68	68,5	69	69,5	70	70,5	71	71,5
durées inversées	3000	2875	2750	2625	2500	2375	2250	2125	2000	1875	1750	1625	1500	1375	1250	1125	1000	875	750	625	500	375	250	125
nuances inversées	127	127	127	122	122	122	98	98	98	84	84	84	70	70	70	56	56	56	42	42	42	28	28	127
espace (coordonnées x)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
espace (coordonnées y)	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
espace (coordonnées z)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13

Notons au passage qu'outre ce découpage des fréquences selon l'octave, il serait nécessaire d'ajouter pour le calcul de la distance l'ambitus du do utilisé (do3, do4...).

Pour le son, on partage un octave en 24 parties égales, ce qui permet de faire correspondre à chaque entier modulo 24, une note parmi

$$\begin{array}{cccccccccccc} do & do+ & do\# & do\#+ & re & re+ & re\# & re\#+ & mi & mi+ & fa & fa+ \\ fa\# & fa\#+ & sol & sol+ & sol\# & sol\#+ & la & la+ & la\# & la\#+ & si & si+ \end{array}$$

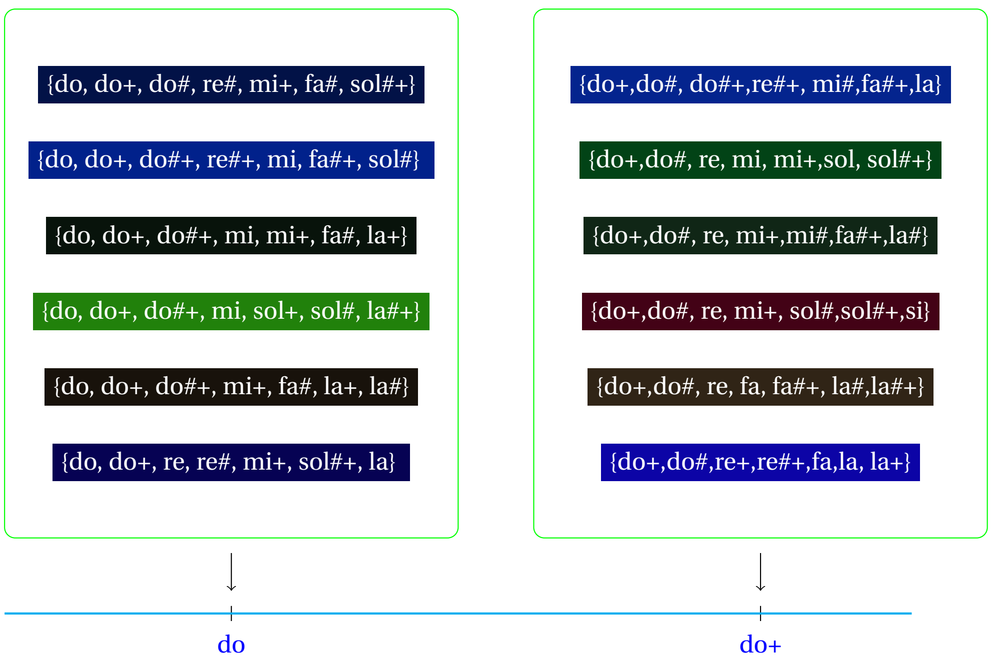
Pour la lumière, on peut utiliser le code RGB, basé sur un format de 24 bits

RED[7 :0]	GREEN[7 :0]	BLUE[7 :0]
23 16	15 8	7 0

On considère que les éléments d'un ensemble homométrique donnent la position des bits égaux à 1, parmi les 24 bits numérotés de 0 à 23. (Le nombre obtenu est ensuite converti en base hexadécimale). Le choix du point base indique la couleur dominante.

	dans $\mathscr{E}_{FOR}$	dans $\mathscr{E}_{PHY}$
définition	une classe d'ensembles homométriques caractérisée par un multi-ensemble Δ	une méta-échelle intervallique
définition	une classe d'ensembles homométriques avec un point base	une échelle intervallique
exemple	$\left\{\begin{array}{c}\{0,1,2,6,9,12,17\}\\\{0,1,3,7,8,13,16\}\\\{0,1,3,8,9,12,19\}\\\{0,1,3,8,15,16,21\}\\\{0,1,3,9,12,19,20\}\\\{0,1,4,6,9,17,18\}\end{array}\right\}$	$\left\{\begin{array}{c}\{do,do+,do\#,re\#,mi+,fa\#,sol\#+\}\\\{do,do+,do\#+,re\#+,mi,fa\#+,sol\#\}\\\{do,do+,do\#+,mi,mi+,fa\#,la+\}\\\{do,do+,do\#+,mi,sol+,sol\#,la\#+\}\\\{do,do+,do\#+,mi+,fa\#,la+,la\#\}\\\{do,do+,re,re\#,mi+,sol\#+,la\}\end{array}\right\}$
		000000100001001001000111 = 021247 000000001001000011000101 1 = 01218B 000010000001001100001011 = 08130B 001000011000000100001011 = 21810B 000110000001001000001011 = 18120B 000001100000001001010011 = 060253
définition	un ensemble homométrique avec un point base	un mode
exemple	$\{0,1,2,6,9,12,17\}$	$\{do,do+,do\#,re\#,mi+,fa\#,sol\#+\}$
		000000100001001001000111= 021247

4.1.3. *Espace compositionnel...* Dans $\mathscr{E}_{PHY}$ voire $\mathscr{E}_{PER}$, l'espace de base paramètre les OSV simples localisés dans l'espace temps. Ces objets sonores et visuels simples sont caractérisés par une fréquence, une intensité, une durée et une localisation spacio-temporelles. « Au-dessus » de chaque OSVS (simple) est associée une même classe homométrique (n-uplets d'ensemble) chaque fois translatée (transposée) à partir de la fréquence de base.



Ici, les notes ont été translatées comme la note de base d'un quart de ton. Les couleurs ont aussi été translatées, par décallage des bits d'une unité vers la gauche :

000000100001001001000111	=>	000001000010010010001110
000000010010000110001011	=>	000000100100001100010110
000010000001001100001011	=>	000100000010011000010110
001000001100000010000101 1	=>	010000011000000100001011 0
000110000001001000001011	=>	001100000010010000010110
000001100000001001010011	=>	000011000000010010100110

De façon abrégée, nous représenterons l'espace physique avec des données non plus seulement de notes et de couleurs, par le diagramme suivant, où par exemple le do+ est représenté par le symbole osv' qui englobe des coordonnées spaciales, et l'élément {do+,do#,re+,re#+,fa,la, la+} par osv'⊕$\{0,1,2,6,9,12,17\}$.

osv⊕$\{0,1,4,6,9,17,18\}$	osv'⊕$\{0,1,4,6,9,17,18\}$
osv⊕$\{0,1,3,9,12,19,20\}$	osv'⊕$\{0,1,3,9,12,19,20\}$
osv⊕$\{0,1,3,8,15,16,21\}$	osv'⊕$\{0,1,3,8,15,16,21\}$
osv⊕$\{0,1,3,8,9,12,19\}$	osv'⊕$\{0,1,3,8,9,12,19\}$
osv⊕$\{0,1,3,7,8,13,16\}$	osv'⊕$\{0,1,3,7,8,13,16\}$
osv⊕$\{0,1,2,6,9,12,17\}$	osv'⊕$\{0,1,2,6,9,12,17\}$
↓	↓
osv	osv'

Cette structure détermine un espace particulier $\mathscr{E}_{PHY}$ dont les éléments sont les OSVC (complexes) : ils contiennent, outre les informations de base de fréquence, intensité, de durée et de localisation, les informations de l'ensemble homométrique choisi dans la classe traduites en caractéristiques comme le mode, le timbre, les distorsions, les interférences, les dégradés par l'application de réalisation physique tphy. Le fait d'avoir en dimensions cachées la possibilité d'utiliser l'un ou l'autre ensemble d'une même classe homométrique permet de coder de façon à la fois unitaire et diversifiée l'utilisation de différentes fibres, les « fibres échelles hauteurs » et les « fibres timbres ».

4.2. **Premier formalisme compositionnel : calcul de la distance à l'intérieur d'une même fibre ou même classe d'ensembles homométriques.** Dans l'espace compositionnel, limitons notre première approche à l'étude d'un seul point symbolisé par un OSV simple constitué de trois paramètres, une hauteur, une intensité, une durée et associés à une seule fibre (OSV complexe) définie dans notre modèle par une classe d'ensembles homométriques (ou un ensemble de multi différence ou méta-mode appliqué aux échelles de hauteurs et /ou de timbres).

Reprenons l'exemple précédant d'une classe d'ensemble homométriques constitué de six ensembles.

$$\begin{array}{ccc} \{0,1,2,6,9,12,17\} & \{0,1,3,7,8,13,16\} & \{0,1,3,8,9,12,19\} \\ \{0,1,3,8,15,16,21\} & \{0,1,3,9,12,19,20\} & \{0,1,4,6,9,17,18\} \end{array}$$

À l'intérieur d'une même classe homométrique, il est possible d'envisager un calcul de la distance entre ces sept ensembles, grâce par exemple à la distance de Hausdorff. La distance entre deux ensembles A et B est le maximum des distances $d(a,B)$ entre chaque élément a de A et B et des distances $d(A,b)$ entre chaque élément b de B et A. Cette distance est, comme la distance ordinaire entre deux entiers, invariante par translation.

Par exemple,

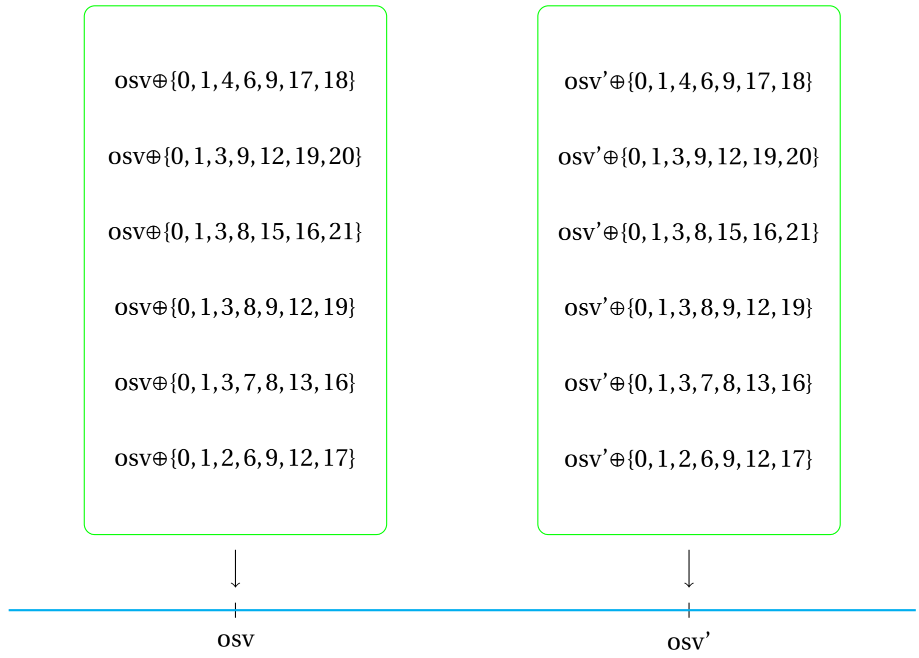
$$\begin{aligned} & d_h(\{0,1,3,7,8,13,16\},\{0,1,3,8,15,16,21\}) \\ = \quad & \max(d(0,\{0,1,3,8,15,16,21\}),d(1,\{0,1,3,8,15,16,21\}),d(3,\{0,1,3,8,15,16,21\}), \\ & d(7,\{0,1,3,8,15,16,21\}),d(8,\{0,1,3,8,15,16,21\}), \\ & d(13,\{0,1,3,8,15,16,21\})d(16,\{0,1,3,8,15,16,21\}), \\ & d(\{0,1,3,7,8,13,16\},0),d(\{0,1,3,7,8,13,16\},1),d(\{0,1,3,7,8,13,16\},3), \\ & d(\{0,1,3,7,8,13,16\},8),d(\{0,1,3,7,8,13,16\},15), \\ & d(\{0,1,3,7,8,13,16\},16),d(\{0,1,3,7,8,13,16\},21) \\ = \quad & \max(0,0,0,1,0,2,0,0,0,0,0,1,0,5) \\ = \quad & 5 \end{aligned}$$

Dans la classe homométrique, on obtient,

d_h	{0,1,2,6, 9,12,17}	{0,1,3,7, 8,13,16}	{0,1,3,8, 9,12,19}	{0,1,3,8, 15,16,21}	{0,1,3,9, 12,19,20}	{0,1,4,6, 9,17,18}
$\{0,1,2,6,9,12,17\}$	0	1	2	4	3	3
$\{0,1,3,7,8,13,16\}$	1	0	3	5	4	2
$\{0,1,3,8,9,12,19\}$	2	3	0	3	1	2
$\{0,1,3,8,15,16,21\}$	4	5	3	0	3	3
$\{0,1,3,9,12,19,20\}$	3	4	1	3	0	3
$\{0,1,4,6,9,17,18\}$	3	2	2	3	3	0

D'une certaine manière le calcul de la distance traduit ici une notion de proximité ou inversement (0, ensembles proches, 5, ensembles éloignés). Suivant l'utilisation de ces résultats, nous pourrions composer un voyage à l'intérieur d'une même fibre, la notion de trajectoire étant ici inventée de manière « synchronique », en dehors d'une conception macroscopique de l'espace temps (absence de coordonnées spatio-temporelles à cette échelle). Appliquée à une fibre timbre par exemple, on peut très bien imaginer des micro-variations chaotiques d'un même timbre comme une déformation progressive de son spectre.

4.3. **Deuxième formalisme compositionnel : calcul de la distance entre deux OSVC spatiaux temporels ayant une même fibre translaté (même classe d'ensembles homométriques translatés).** Illustrons cette idée par un nouvel exemple. La partie "espace" de l'espace temps est dans ce cas munie d'une distance qui est intégrée au formalisme. L'espace $\mathscr{E}_{FOR}$ que nous considérons dans cet exemple est donc l'ensemble de ces fibres $T_{(osv)}$. Un point de cet espace est un couple (osv,G) où osv est un OSV simple localisé et G un mode dont le multi-ensemble de différences est $\Delta(G)$.



Pour fixer une distance entre deux tels points, on pose d'abord
si osv = (fréquence, intensité, localisation, durée)
et osv' = (fréquence', intensité', localisation', durée')
sont deux objets sonores et visuels simples localisés dans l'espace

$$\begin{aligned} & d_b(osv, osv') \\ &= \sqrt{\begin{array}{l} ad(\text{fréquence,fréquence'})^2 + bd(\text{intensité,intensité'})^2 \\ +cd(\text{localisation,localisation'})^2 + ed(\text{durée, durée'})^2 \end{array}} \end{aligned}$$

où a, b, c sont des constantes d'homogénéisation. On peut alors définir

$$d((osv \oplus G), (osv' \oplus G')) = \sqrt{f d_b(osv, osv')^2 + g d_h(G, G')^2} \tag{4}$$

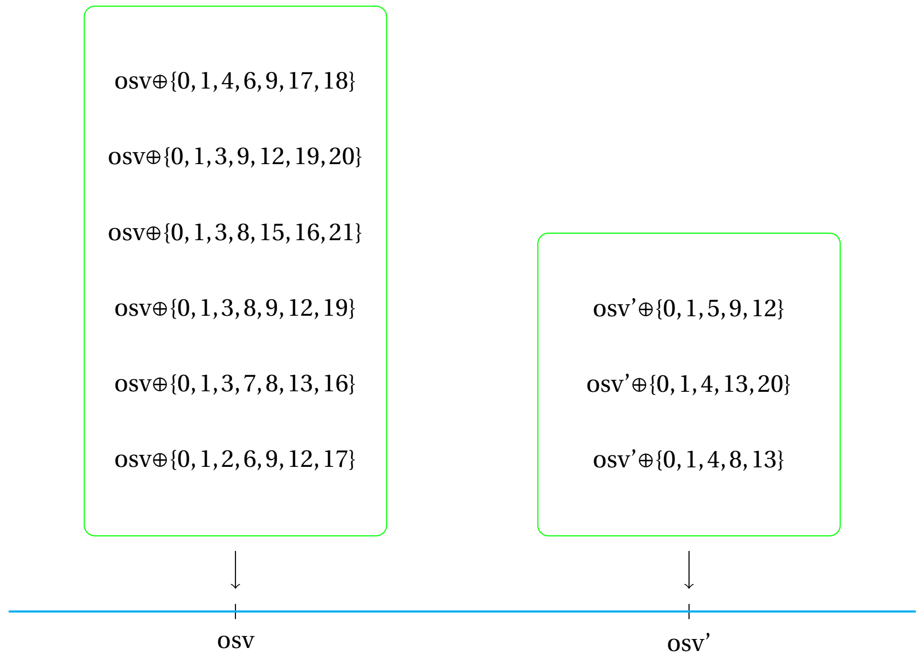
où f et g sont des constantes qui remédient à l'inhomogénéité des unités des grandeurs considérées, d_b la distance de base entre deux OSV simples localisés dans l'espace temps et d_h est la distance de Hausdorff entre les deux ensembles G et G'. Si on souhaite construire une distance plus conforme aux perceptions de fréquence, on peut remplacer dans la formule précédente $ad(\text{fréquence,fréquence'})^2$ par

$$ad(\text{fréquence,fréquence'})^2 => ad_{mod24}(\text{note,note'})^2 + Ad(\text{octave,octave'})^2$$

où A est un paramètre qui résultera en une tendance à quitter plus ou moins vite l'octave présente.

osv							
son				lumière			
fre en Hz	int en dB	loc en cm	dur en sec	fre' en Hz	int' en lum	loc' en cm	dur' en sec
do bleu court proche (osv 1)							
23	17	12	1	21	18	12	1
do bleu court proche (osv 2)							
23	17	12	1	24	18	12	5
do bleu court proche (osv 3)							
23	18	12	1	24	18	12	1
distance (osv1,osv2)							5
distance (osv2,osv3)							4.1

4.4. **Troisième formalisme compositionnel : calcul de la distance entre deux OSVC spatiaux ayant des fibres différentes - classes d'ensembles homométriques différents.**



Dans ce cadre plus général, on peut ajouter à la formule (4) la distance de Hausdorff entre les ensemble de multi-différences, avec une pondération qui résultera en une tendance à quitter plus ou moins vite l'échelle intervallique présente.

$$d((osv \oplus G), (osv' \oplus G')) = \sqrt{f d_b(osv, osv')^2 + g d_h(G, G')^2 + G d_h(\Delta(G), \Delta(G'))^2} \qquad (5)$$

Le temps est dans cet exemple considéré comme le paramètre des trajectoires. Plus précisément, la notion de distance permettrait de définir, par des équations, les géodésiques comme courbes abstraites dans un espace. Pour tracer ces courbes (ou pour interpréter une oeuvre) il faudrait paramétrer ces courbes, c'est à dire associer à chaque paramètre (donc à chaque instant) un point dans l'espace.

5. Conclusion

Nous avons introduit trois axes de réflexion et d'application qui ouvrent des perspectives d'invention d'une œuvre artistique.

Grâce à une approche de la composition par le biais de la géométrie et des espaces fibrés, nous avons dans un premier temps à la fois clarifié et simplifié le contexte de la création et de la composition afin d'envisager de nouvelles formes de complexités qui pourraient être à l'origine d'une invention artistique sonore et visuelle renouvelée.

Le second axe de réflexion concerne la création d'un espace métrique sonore et visuel permettant d'envisager des notions de proximité si importantes pour "composer la perception", grâce aux calculs des distances associées à l'ensemble des paramètres des OSV (distance de Hausdorff par exemple), notion envisagée de manière singulière. Cette métrique symbolisant en dernier lieu l'espace "poly-sensoriel" ou une métrique de l'espace perceptif est à l'image d'une organisation de l'espace chromatique des sens – idée d'une modélisation spatio-temporel du seuil différentiel de perception appliqué ici aux OSVC dans le cadre d'une création numérique.

Objet d'une prochaine étape de la recherche, l'introduction du dernier axe concerne l'invention de trajectoires qui ne se limite pas à une problématique mathématique puisqu'elle simule la réalisation de l'œuvre musicale. Des ordres de priorités peuvent intervenir dans le formalisme des trajectoires, une trajectoire de l'espace temps pouvant par exemple induire de manière prioritaire la trajectoire des autres paramètres sonores et visuels. Le calcul par le biais de simulations algorithmiques serait ici indispensable pour aider à déterminer ces trajectoires, en gérant une combinaison de règles, à l'image d'une combinatoire tenant compte des différents exemples proposés, d'un voyage à l'intérieur d"une fibre à la composition de plusieurs espace temps imbriqués (géodésiques, nœuds, trajectoires de gradient.....), possibilité de favoriser ou exclure des distances spécifiques, à la fois horizontalement et verticalement (importance musicale pour favoriser ou non des singularités harmoniques ou mélodiques), contrôle vertical et horizontal du degré d'harmonicité /inharmonicité (notion spectrale inspirée de Fourier), structuration de type « fractale » et combinatoires liées à l'invention de multiples dimensions ou échelles de perception imbriquées, règles relativistes introduisant une combinatoire de l'espace-temps.

ANNEXE A. STRUCTURES GÉOMÉTRIQUES

Soulignons que la gamme des structures géométriques est vaste. Celle que les mathématiciens considèrent en premier est la topologie, qui fixe la notion de proximité. Elle permet de décrire l'allure générale de l'espace à travers les notions de connexité, d'homotopie (i.e. la contractibilité des lacets, des sphères de toute dimension tracées sur l'espace), de compacité ... Historiquement, la structure la plus importante est une structure différentiable métrique qui permet de définir des espaces tangents et de mesurer les longueurs de chemins et les distances entre deux points. Noter qu'un même espace peut être muni de plusieurs métriques différentes. Il y a donc un choix à faire, même si les mathématiciens cherchent souvent des métriques dites canoniques, qui reflètent au mieux la géométrie. Si on décrète par exemple que la distance entre le pôle Nord et le pôle sud est supérieure au diamètre de l'équateur, on obtient un espace métrisé qui a l'allure d'un énorme ballon de rugby, mais qui a la même topologie qu'une sphère. Une structure conforme permet de définir des mesures d'angles. Une structure complexe rigidifie l'espace. Une structure feuilletée est la partition de l'espace en sous-ensembles disjoints localement semblables, par exemple le découpage de la terre en parallèles. La figure 4 donne un exemple plus complexe de feuilletage.

D'autres structures (symplectique, structure de contact...) distinguent certaines directions tangentes, comme dans la figure 5 .

En mathématiques, on fixe d'abord les structures et on en étudie ensuite leurs éléments remarquables, comme les lacets non contractibles dans les espaces topologiques, les feuilles compactes dans les feuilletages, les géodésiques dans les espaces métriques (qui comme les droites dans le plan euclidien ou les grands cercles dans les sphères

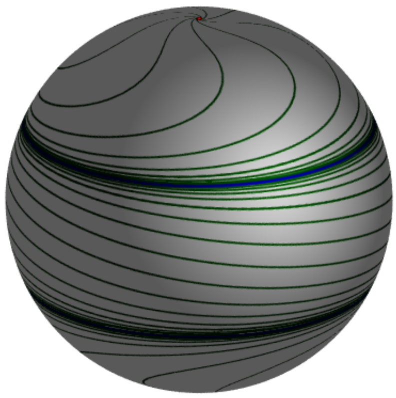


FIGURE 4. Exemple de feuilletages

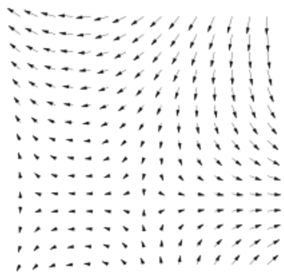


FIGURE 5. Exemple de champs de vecteurs

euclidiennes minimisent les longueurs). La figure 6 montre que certaines géodésiques du tore avec la métrique induite par la métrique euclidienne de l'espace peuvent être compliquées). Un exemple pour comprendre la différence entre courbe abstraite et

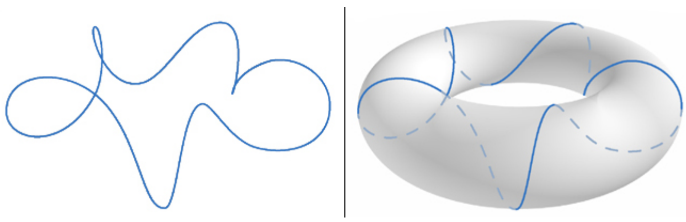


FIGURE 6. Les géodésiques du tore

courbe paramétrée est celui du cercle unité plan. Il a pour équation $x^2 + y^2 = 1$ et pour paramétrage $x(t) = \cos t; y(t) = \sin t$. C'est un exemple trompeur car le paramétrage est facile à expliciter. Trouver un paramétrage est aussi difficile que résoudre une équation. Bien souvent, il faut se contenter d'approcher la solution. C'est pourquoi, on a souvent recours à des algorithmes de recherche qui convergent vers la solution, comme celui des colonies de fourmis dans le cas de recherche de géodésiques.

Références

[1] Berger Marcel, *Géométrie.* , CEDIC, Paris ; Nathan Information, Paris, (1977),

[2] Bigo Louis, *Représentations symboliques musicales et calcul spatial*, thèse en informatique, Université Paris-Est LACL/IRCAM (2013)

[3] Penrose Roger, *The road to reality*, A complete guide to the laws of the universe, Alfred A. Knopf, Inc., New York, (2005)

[4] Pétri Jérôme, de Gérando Stéphane, *Cinq lois artistiques relativistes. Du concept d'espace-temps en astrophysique à l'invention sonore et visuelle*, Paris, 3icar /icarEditions (2015)

[5] Jedrzejewski Franck, de Gérando Stéphane, *Ensembles homométriques et création sonore et visuelle contemporaine*, Paris, 3icar /icarEditions (2014)

[6] de Gérando Stéphane, *Dialogues imaginaires. Une expérience de la création contemporaine et de la recherche*, Paris, Inactuelles (2010). Ouvrage accompagné d'un disque monographique, en collaboration avec Radio-France, MFA, 3icar – icarEnsemble, Inactuelles